Lösungen zu den Tutoriumsaufgaben

Lösungshinweise Vorbereitungsblatt:

V1 Substitution $u = x^2$ und partielle Integration liefern $\int_0^1 x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2}$.

V2
- (a) nicht offen, nicht abgeschlossen, erst recht nicht kompakt
- (b) abgeschlossen, nicht kompakt, nicht offen
- (c) offen, nicht abgeschlossen, nicht kompakt
- (d) abgschlossen, nicht offen, nicht kompakt
- (e) nicht offen, nicht abgeschlossen, nicht kompakt
- (f) offen, nicht abgeschlossen, nicht kompakt
- (g) nicht offen, abgeschlossen, kompakt
- (h) nicht offen, nicht abgeschlossen, nicht kompakt
- (i) nicht offen, abgeschlossen, kompakt
- (j) nicht offen, abgeschlossen, nicht kompakt
- (k) offen, nicht abgeschlossen, nicht kompakt
- (l) nicht offen, abgeschlossen, nicht kompakt

V3 Es handelt sich um eine DGL mit getrennten Variablen. Eine Lösung des AWP ist $\phi(x) = \tan(2\sqrt{x} - 2 + \frac{\pi}{4})$. Da $x > 0$ sein muss und tan auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ definiert ist, ergibt sich für ϕ das maximale Definitionsintervall $(0, (1 + \frac{\pi}{8})^2)$.

V4 Folgendes sind Fundamentalsysteme von reellen Lösungen

- (a) e^x, e^{2x}, e^{-3x}
- (b) e^{-3x}, e^{2x}, xe^{2x}
- (c) 1, $e^{2x}\cos(3x)$, $e^{2x}\sin(3x)$
- (d) $e^x, e^{-x}, \cos(x), \sin(x)$

In (a) ist eine Lösung des AWP gegeben durch $-e^x + e^{2x} + 2e^{-3x}$.

V5 Kritische Punkte sind $(0,0)$, $(1,0)$, $(-1,0)$. Dabei ist $(0,0)$ ein Sattelpunkt, $(\pm 1, 0)$ sind beides Minima.

V6 Mit der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren ergeben sich als mögliche Extrema die Punkte $(0,0,\pm\sqrt{3})$, $(1,1,1)$, $(-1,-1,1)$, $(1,-1,-1)$, $(-1,1,-1)$. Die Werte von f an diesen Punkten sind $\pm\sqrt{3}$, 3,3, -3,-3. Daher liegen bei $(1,1,1)$ und $(-1,-1,1)$ Maxima, bei $(1,-1,-1)$ und $(-1,1,-1)$ Minima vor. Über die Punkte $(0,0,\pm\sqrt{3})$ lässt sich nicht so einfach etwas sagen.

V7 (a) $\sin(\frac{x}{n})$ kovergiert auf $[0, 2\pi]$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion, auf $[0, \infty)$ nicht.

(b) $\frac{1}{1+nx}$ konvergiert nicht gleichmäßig (Grenzfunktion nicht stetig).

(c) $x^2 \cos(\frac{1}{n})$ konvergiert auf $[0, 2]$ gleichmäßig gegen die Funktion $f(x) = x^2$, aber nicht auf $[0, \infty)$.

V8 (a) $x_n = (\frac{1}{n^2}, \sin(\frac{1}{n})) \in \mathbb{R}^2$ konvergiert gegen $(0,0)$.

(b) $x_n = (\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\sin(n)) \in \mathbb{R}^2$ konvergiert gegen $(0,0)$.

(c) $x_n = (\cos(n), \sin(n)) \in \mathbb{R}^2$ konvergiert nicht.

(d) $x_n = e^{-n}(\cos(n), \sin(n)) \in \mathbb{R}^2$ konvergiert gegen $(0,0)$.